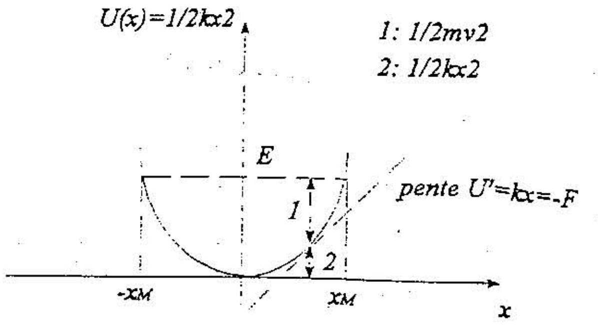
Par exemple, à la force conservative de rappel d'un ressort F=-kx est associée la fonction d'énergie potentielle $U=1/2kx^2$ qui est, au signe près, une de ses primitives. De même, à la force pesanteur F=-mg est associée U=mgy.

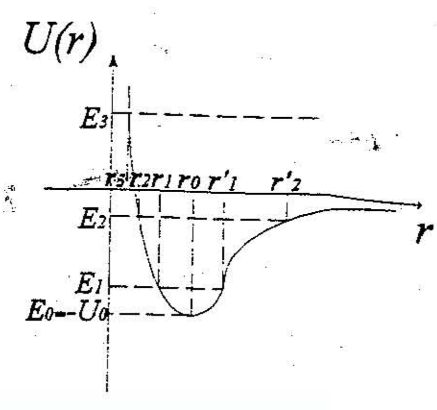
Notons que si nous connaissons la fonction d'énergie potentielle, la force qui lui est associée s'obtient comme suit: $F_x = -U' = -\frac{dU}{dx}$.

Reprenons l'étude du mouvement de la masse m attachée au ressort et soumise à la seule force conservative de rappel du ressort. Supposons que l'énergie totale du système isolé masse-ressort soit E. Notons x l'élongation du ressort par rapport à sa longueur au repos l_0 et supposons que cette élongation soit comprise dans l'intervalle $x \in [-x_m, x_m]$. Le principe de conservation de l'énergie mécanique s'écrit: $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = cte$.

Lorsque l'élongation du ressort est maximale $|x| = x_M$, l'énergie totale E du système est uniquement de nature potentielle et vaut $E=1/2kx_M^2$. La particule est alors soumise à une force de rappel F=-kx (avec $x=x_M$ si le ressort est étiré ou $x=-x_M$ s'il est compressé) tendant à la ramener à sa position d'équilibre x=0. Entre les élongations maximales $-x_M$ et x_M, il y a conversion entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique de la particule de sorte que $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$ reste constante. L'énergie cinétique $K=1/2mv^2$ est alors lue sur un diagramme d'énergie (*cf* supra). Notons que x=0 est une position d'**équilibre stable** car tout écart par rapport à cette position fait naître une force de rappel tendant à ramener la particule vers cette position d'équilibre. Le sens de cette force est opposé au signe de la pente de la tangente au graphe U(x): F=-U'=-kx. En effet si la pente est positive (U'>0), la force de rappel F est négative, et inversement.



Ce modèle simple est à la base de la description microscopique d'un solide cristallin. Dans un solide cristallin, les atomes sont agencés suivant des configurations géométriques bien établies. Modélisons leurs interactions par des ressorts. Les atomes vibrent alors autour de leur position d'équilibre *stable* en convertissant de l'énergie potentielle en énergie cinétique, et inversement (*cf infra* l'agitation thermique des atomes ou molécules au sein d'une structure cristalline).



Considérons deux atomes premiers voisins vibrant autour de leur position d'équilibre dans la structure cristalline. Notons r la distance séparant les deux noyaux (distance internucléique).

Soit r_0 la distance internucléique d'équilibre. Nous choisissons le zéro du potentiel de telle sorte que $U(r=+\infty)=0$.

Si le système est doté d'une énergie $E=K+U$ négative, il se trouve dans un **état lié**. Si $E>0$, l'état est non lié.

Supposons que le système se trouve dans un état lié d'énergie $E_1<0$. La distance internucléique r est comprise entre r_1 et r'_1. En r_1 et en r'_1, l'énergie est uniquement de nature potentielle. Partout ailleurs, l'énergie cinétique $K=E_1-U(r)$ est non nulle. Notons $r_{E_1}=\frac{r_1+r_1'}{2}$ la distance internucléique moyenne pour cet état d'énergie E_1.

Supposons maintenant que le système se trouve dans un état lié d'énergie $E_2>E_1$. La distance internucléique r est comprise entre r_2 et r'_2. En r_2 et en r'_2, l'énergie est uniquement de nature potentielle. Partout ailleurs, l'énergie cinétique $K=E_2-U(r)$ est non nulle. Notons $r_{E_2}=\frac{r_2+r_2'}{2}$ la distance internucléique moyenne pour cet état d'énergie E_2.

La courbe de potentiel étant asymétrique, nous remarquons que si l'énergie (*interne*) totale E augmente ($E_2>E_1$), il en est de même de la distance internucléique moyenne $r_{E2}>r_{E1}$. Cette constatation nous permet d'expliquer microscopiquement le phénomène de dilatation d'un corps solide lorsque son énergie interne (*et donc sa température, cf infra*) augmente.

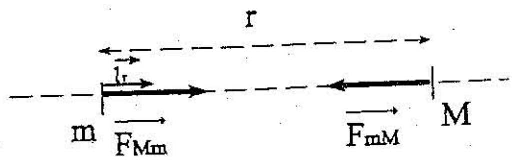
U_0 est l'énergie à fournir au système, initialement dans un état d'équilibre stable (auquel correspond la distance internucléique r_0 et l'énergie potentielle $E=-U_0$) pour que les deux atomes puissent se dissocier. U_0 est donc l'énergie de liaison (d'une particule) dans un état lié.

Lorsque $E=E_3>0$, l'état est non lié. Lorsque deux atomes se rapprochent, leur interdistance nucléique diminue jusqu'à $r=r_3$. En ce point, l'énergie du système est uniquement de nature potentielle. Puisque $U'(r_3)<0$, la force $F=-U'(r_3)$ d'interaction entre les deux atomes est répulsive et les deux atomes s'éloignent, sans plus se rapprocher de nouveau par la suite.

4.4.5 Approximation du potentiel gravitationnel

Pour des objets proches de la surface de la terre, nous pouvons supposer que la force de gravité est constante et U(h)=mgh (*cf choix du zéro de potentiel*).

De manière générale, considérons les forces centrales (*i.e. toujours dirigées suivant la droite joignant les deux particules*) d'attraction gravitationnelle entre deux particules de masses respectives m et M.



Notons $\vec{F}_{Mm}$ la force exercée par M sur m et $\vec{F}_{mM} = -\vec{F}_{Mm}$ sa réaction, *i.e.* la force exercée par m sur M: $\vec{F}_{mM} = M\vec{a}_M = -M\frac{Gm}{r^2}\vec{1}_r$.

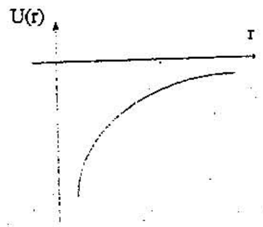
De quel potentiel dérive cette force?

Remarquons tout d'abord qu'une force centrale présente une symétrie sphérique et ne dépend que de la coordonnée radiale r: $\vec{F}_r = F_r\vec{1}_r$. Le travail effectué par la force conservative gravitationnelle, exercée par m, pour déplacer de M d'une distance r_A à $r_B > r_A$ de m vaut dès lors: $W_g = \int_{r_A}^{r_B} F_{mM}\,dr = \int_{r_A}^{r_B} F_r\,dr$ soit:

$$W_g = -GmM\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}dr = GmM\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) = -\Delta U = -\left(U(r_B)-U(r_A)\right)$$

La fonction énergie potentielle gravitationnelle s'écrit:

$$U(r) = -\frac{GmM}{r} \quad \text{et} \quad F_r = -U'(r) = -\frac{GmM}{r^2}$$



Remarquons que le zéro de potentiel est choisi tel que U(+∞)=0. Le signe - dans l'expression de U(r) signifie qu'un agent extérieur doit effectuer un travail sur les particules pour augmenter la distance qui les sépare.

Approximation au voisinage de la terre

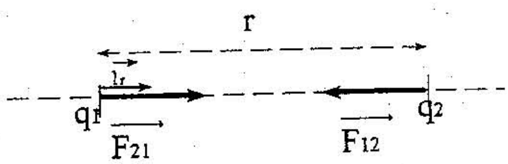
A la distance r_T du centre de masse de la terre, le potentiel gravitationnel s'écrit $U(r_T)=-\frac{GmM_T}{r_T}$. De même, à la distance r_T+h, $U(r_T+h)=-\frac{GmM_T}{r_T+h}$.

La variation d'énergie potentielle de la masse m passant de r_T à r_T+h est dès lors égale à: $\Delta U=U(r_T+h)-U(r_T)=GmM_T\left(\frac{1}{r_T}-\frac{1}{r_T+h}\right)=GmM_T\frac{h}{r_T(r_T+h)}\approx mgh$. Nous avons posé $g=\frac{GM_T}{r_T^2}$ et

$\frac{1}{r_T(r_T+h)}\approx\frac{1}{r_T^2}$ si $h \ll r_T$. mgh représente en fait la variation de l'énergie potentielle gravitationnelle entre deux points proches de la surface de la terre.

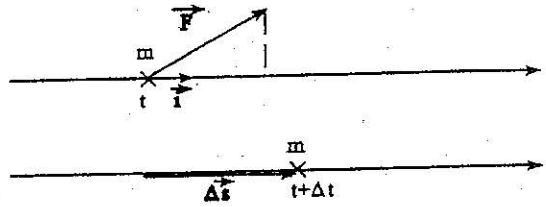
Remarque

Bien que l'analogie soit purement formelle, notons que la loi de Coulomb relative à la force d'attraction (*ou de répulsion*) électrostatique entre deux charges q_1 et q_2 s'écrit, suivant nos conventions, $\vec{F}_{12}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{1}_r$ (cf dessin si q_1 et q_2 sont de signes contraires). Elle dérive du potentiel $U(r)=k\frac{q_1q_2}{r}$,



$k=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}=8{,}99.10^9 Nm^2C^{-2}$ étant la constante de Coulomb et $\epsilon_0=8{,}85.10^{-12}C^2N^{-1}m^{-2}$ la permittivité du vide.

Chapitre 5: Puissance



Posons un corps de masse m sur un plan horizontal. Exerçons sur ce corps une force *constante* $\vec{F}$, de composante utile $F\vec{i}$ dans la direction du mouvement, ayant pour effet le déplacement du corps de $\Delta\vec{s}=\Delta s\,\vec{i}$. Le travail de la force est $\Delta W=\vec{F}\Delta\vec{s}$. Soit Δt le temps nécessaire pour accomplir ce travail.

Définitions

La **puissance moyenne** développée est le travail de la force par unité de temps:

$$\langle P\rangle=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\vec{F}\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}=\vec{F}\langle\vec{v}\rangle \;.$$

La **puissance** (***instantanée***) est alors égale à: $P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{dW}{dt}=\vec{F}\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}=\vec{F}\frac{d\vec{s}}{dt}=\vec{F}\vec{v}$

(si $\vec{F}$ est constante).

En effectuant une analyse dimensionnelle, notons que les dimensions de la puissance sont: $[P]=[F][v]=MLT^{-2}.LT^{-1}=ML^2T^{-3}$. L'unité S.I. de puissance est le watt (W): $1W=1Js^{-1}=1kg.m^2.s^{-3}$.

Remarquons que le *kilowattheure* (kWh) est une unité d'*énergie* dérivée de cette unité de puissance: $1kWh=10^3.3{,}6.10^3Ws=3{,}6.10^6J$.

Exercice: Quelle est la puissance minimale que doit fournir le moteur pour soulever un ascenseur, de masse 1000kg et de charge maximale admissible 800kg, à une vitesse constante de $3ms^{-1}$ si son mouvement vers le haut est freiné par un frottement constant de 4000N? Quelle puissance le moteur doit-il fournir pour imprimer une accélération vers le haut de $1ms^{-2}$?

Rép: 64,8kW et $P=(2{,}34.10^4v)W$.

Illustrations

1. Le cheval... à vapeur?

En vue de promouvoir l'utilisation de la machine à vapeur plutôt que l'emploi de chevaux, J. Watt a introduit au 19ème siècle le *Horse Power (HP)* comme unité de puissance: 1HP=746W. Il s'agissait d'une estimation de la puissance moyenne développée par un cheval effectuant un travail mécanique. On définit également le *Cheval Vapeur (CV)*: 1CV=736W.

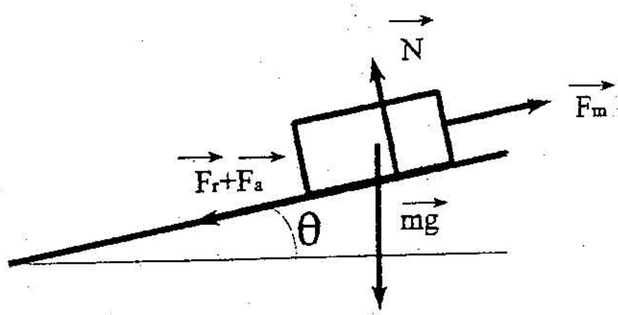
Exercice: Quelle est la quantité d'eau qu'un cheval doté d'une telle puissance est susceptible d'extraire d'un puits de profondeur 20m durant une journée de travail de 8h?

Rép: $V \approx 110 m^3$.

2. Le moteur... à essence

Supposons qu'une voiture de masse m=1450kg gravisse une colline inclinée de 10° à la vitesse constante de 100km/h. Quelle puissance effective doit développer le moteur de cette voiture? En supposant qu'elle consomme 13,6l/100km, quel est le rendement du moteur sur sol horizontal?

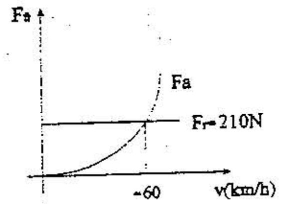
Répertorions l'ensemble des forces extérieures s'appliquant sur la voiture. Il s'agit du poids du véhicule $\vec{P}=m\vec{g}$, de la réaction normale du sol $\vec{N}$, de la force motrice $\vec{F}_m$ et des forces de frottement qui se décomposent en **frottements de roulement** $\vec{F}_r=-\mu_r N\vec{i}$ et en **frottements de traînée aérodynamique** dus au frottement fluide de l'air $\vec{F}_a$.



Le coefficient de frottement de roulement est posé égal à μ_r=0,015. Bien que nous la supposions constante, remarquons que la force de frottement de roulement diminue en réalité légèrement lorsque la vitesse du véhicule augmente suite à son décollement aérodynamique.

La force de frottement fluide de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse du véhicule et est égale à: $F_a=\frac{1}{2}C_x A\rho v^2 \approx 0,65v^2$ où Cx est un coefficient de proportionnalité posé égal à 0,5, $A\approx 2m^2$ est l'aire de la plus grande section plane du mobile (*i.e. son maître-couple*) et $\rho=1,293.10^{-3}$ $kg.dm^{-3}$ est la masse volumique de l'air (*dans les conditions normales de pression et de température*).

Appliquée au mouvement de la voiture, la seconde loi de Newton se décompose comme suit: $\begin{cases} OX: & F_m - mg\sin\theta - F_a - F_r = 0 \\ OY: & N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$



Dès lors, $F_r = \mu_r mg\cos\theta \approx 210N$ et, à 100km/h, la force de frottement de roulement est nettement plus faible que la force de frottement fluide de l'air $Fa \approx 0{,}65v^2 \approx 502N$. Inversément, à faible vitesse, les forces de frottement sont essentiellement liées au roulement.

La puissance motrice effective que doit développer le moteur sert à vaincre:
- la composante utile du poids du véhicule: $P_1 = mgv\sin\theta \approx 69kW$
- la force de frottement de roulement: $P_2 = 210v \approx 5{,}8kW$
- la force de frottement fluide de l'air: $P_3 \approx 0{,}65v^3 \approx 13{,}9kW$.

La puissance effective que devra développer le moteur est alors égale à: $P_1+P_2+P_3 \approx 88{,}7kW$ parmi lesquels $P_2+P_3 \approx 19{,}7kW$ servent à vaincre les frottements. Seuls ces 19,7kW sont donc requis pour faire avancer la voiture sur un plan horizontal.

Notons que cette puissance effective est très nettement inférieure à la puissance développée après la conversion énergétique du carburant. Supposons à cet effet que la voiture consomme 13,6l/100km. Connaissant l'équivalent énergétique d'un litre d'essence ($R \approx 3{,}6.10^7J$), la puissance totale du moteur à 100km/h est alors de 13,6R/3600 soit environ 136kW.

Examinons les pertes de puissance d'une voiture munie d'un moteur de 136kW. Nous supposons que la puissance à l'arbre de transmission (*i.e.* la puissance totale diminuée des pertes dans les systèmes d'échappement et de refroidissement) est de 45kW. Parmi ces 45kW, seuls 19kW servent à vaincre les forces de frottement et assurent la propulsion du véhicule. Le rendement du moteur est donc d'environ 19/45≈40%.

	Perte de puissance (kW)	Perte de puissance (%)
Système d'échappement	46	33
Système de refroidissement (pertes aux parois du moteur....)	45	33
Système d'entrainement (transmission. roues. roulement à billes des essieux. différentiel)	13	10
Frottement interne (autres pièces mobiles)	8	6
Accessoires (fonctionnement de la pompe à huile. de la pompe à essence. servodirection, servofrein, air conditionné. accessoires électriques)	5	4
Propulsion du véhicule	19	14

Seule environ 14% de l'énergie totale disponible sert donc à maintenir la vitesse du véhicule et à vaincre la force de frottement sur la chaussée f_r, essentiellement due au fléchissement des pneus, et la résistance de l'air f_a.